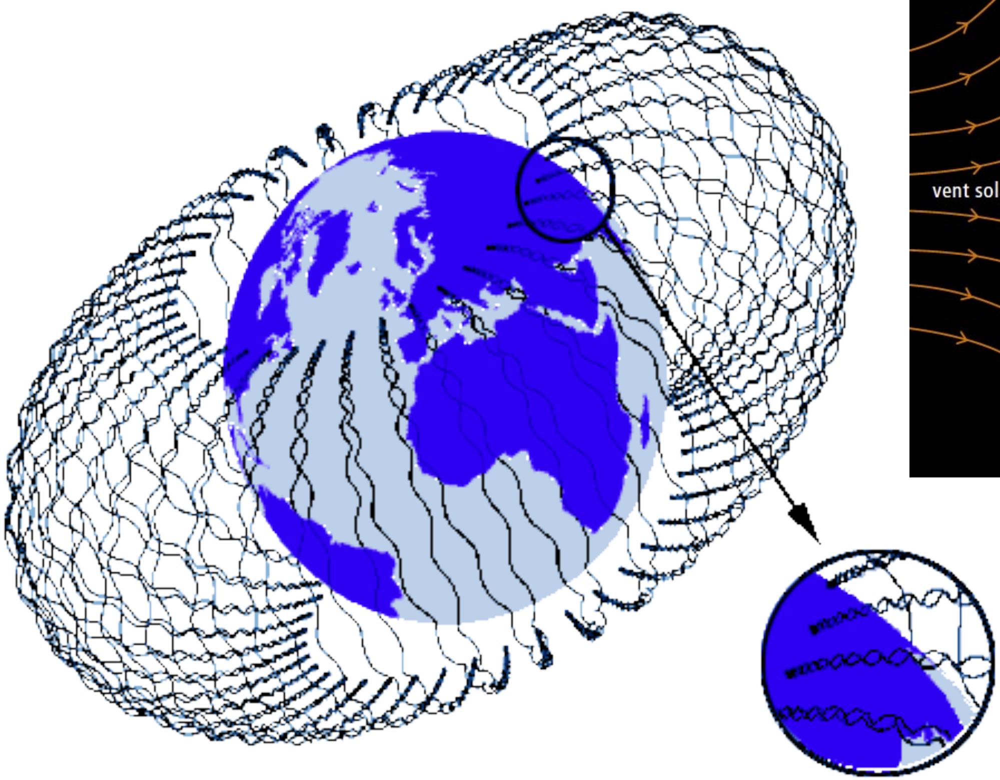
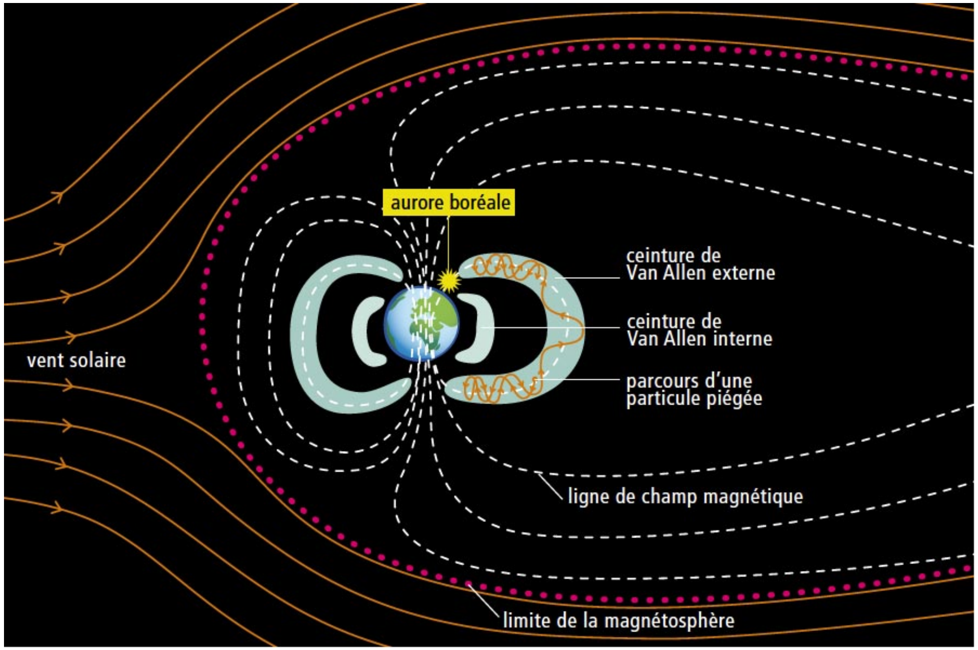
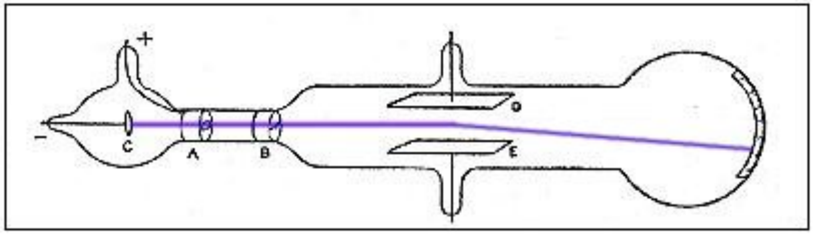
Mouvement de particules chargées dans les champs électrique et magnétique







1-Force de Lorentz

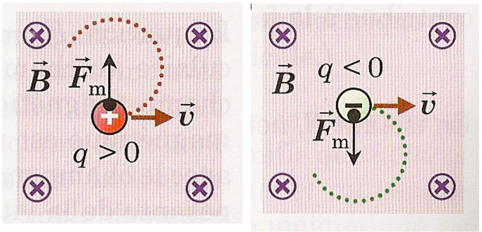
1-1 Formulation

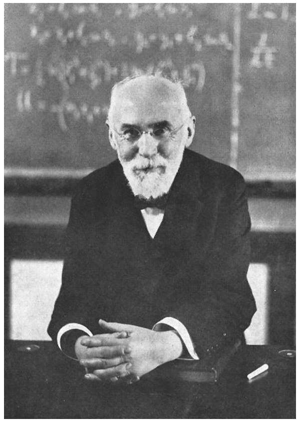
Soit une particule de charge q, de masse m, animée d'une vitesse $\vec{v}$, dans un référentiel galiléen $\mathfrak{R}_g$, en présence d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$. Elle est soumise à la **force de Lorentz**:

$$\boxed{\vec{F} = q\left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right]}$$

Remarques:

- Les expressions de $\vec{F}$, q et m ne dépendent pas du référentiel $\mathfrak{R}$ de travail
- Les expression de $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{v}$ dépendent du référentiel $\mathfrak{R}$ de travail
- E/B est homogène à une vitesse





Hendrik Antoon Lorentz (né le 18 juillet 1853 à Arnhem, Pays-Bas ; mort le 4 février 1928 à Haarlem, Pays-Bas) est un physicien qui reçut en 1902 le prix Nobel de physique et en 1908 la Médaille Rumford. Il fut lauréat de la Médaille Franklin en 1917 pour ses travaux sur la nature de la lumière et la constitution de la matière. Il reçut également la médaille Copley en 1918. La majorité de ses travaux portèrent sur l'électromagnétisme. Il a laissé son nom aux transformations de Lorentz qui sont à la base de la théorie de la relativité restreinte.

1-2 Puissance de la force de Lorentz

- $P = \vec{F}.\vec{v} = q\vec{E}.\vec{v} + \underbrace{q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right).\vec{v}}_{=0 \text{ car } \vec{v}\wedge\vec{B}\perp\vec{v}} \Rightarrow \boxed{P = q\vec{E}.\vec{v}}$

La force électrique travaille, la force magnétique ne travaille pas

$\rightarrow$ La force électrique :

– permet d'accélérer ou de décélérer une particule, c'est à dire de modifier $\left\|\vec{v}\right\|$

– permet de modifier la trajectoire de la particule, c'est-à-dire de modifier la direction de $\vec{v}$

$\rightarrow$ La force magnétique :

– ne permet pas d'accélérer ou de décélérer une particule

– permet de modifier la trajectoire d'une particule en modifiant la direction de $\vec{v}$ (mais pas sa norme)

- $\boxed{\text{Si } \vec{E} \text{ seul}}$ $\left(\vec{F}_E = q\vec{E} \text{ est une force conservative}\right)$

$$\left.\begin{aligned} &\underbrace{\Delta\varepsilon_p}_{\substack{\text{variation de l'énergie potentielle} \\ \text{du système particule–champ électrique}}} = \varepsilon_{pb} - \varepsilon_{pa} = -\underbrace{q\int_a^b \vec{E}\bullet d\vec{\ell}}_{\text{travail de la force électrostatique}} \\ &\underbrace{\Delta V}_{\substack{\text{variation du potentielle électrostatique} \\ \text{du système particule–champ électrique}}} = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\bullet d\vec{\ell} \end{aligned}\right\} \text{Définition du potentiel électrostatique} : V \equiv \frac{\varepsilon_p}{q}$$

$$\boxed{\varepsilon_m = \varepsilon_c + \varepsilon_p = \frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{constante}} \quad \left(\text{si } \vec{E} = \overrightarrow{cste},\ \Delta V = -E\int_a^b d\vec{\ell} = -Ed\right)$$

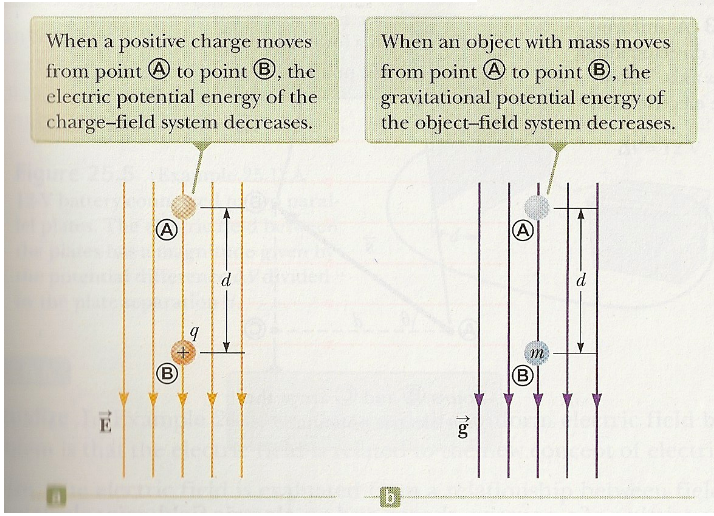


Figure 25.2 (a) When the electric field $\vec{E}$ is directed downward, point Ⓑ is at a lower electric potential than point Ⓐ. (b) A gravitational analog to the situation in (a).

- $\boxed{\text{Si } \vec{B} \text{ seul}}$

$P = q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right).\vec{v} = 0$

Théorème de la puissance cinétique: $d\varepsilon_c / dt = d\left(mv^2/2\right)/dt = P = 0$

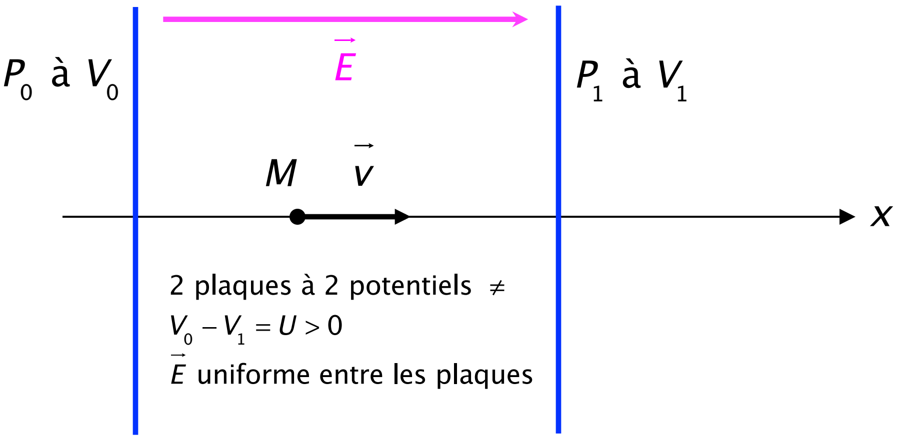
$\Rightarrow \boxed{\left\|\vec{v}\right\| = v = \text{constante}}$

2-Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme et indépendant du temps

2-1 Rôle accélérateur

cas étudié: $\vec{E} \parallel \vec{v_0}$

Soit un proton $m = 1{,}7 \times 10^{-27}$ kg et $q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C
A $t = 0$, le proton est en O avec $\vec{v_0} = v_0 \vec{u_x}$
$\vec{v_1}$ quand proton en P_1 ?



- Application de la 2ème loi de Newton

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}\,t + \vec{v_0}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \frac{q}{2m}\vec{E}\,t^2 + \vec{v_0}\,t + \underbrace{\vec{r_0}}_{\vec{0}}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{q}{2m}E\,t^2 + v_0 t} \quad (qE > 0) \quad \text{Mouvement rectiligne uniformément accéléré}$$

- Conservation de l'énergie mécanique

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + qV_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 \Rightarrow \boxed{v_1^2 = v_0^2 + \frac{2q}{m}U}$$

$v_1 > v_0$ car $U = V_0 - V_1 > 0$ et $q > 0$

- Limite relativiste Si $v_0 = 0$, $v = \frac{q}{m}E\,t \;\Rightarrow\; v(t = \infty) = \infty$!!!

Calcul classique valable si $v/c \ll 1$

On se fixe comme critère $v/c < 0{,}1$

$$v = \sqrt{\frac{2q}{m}U} < 0{,}1c \Rightarrow U < 0{,}01\frac{mc^2}{2q}$$

$\rightarrow$ Proton $m = 1{,}7 \times 10^{-27}$ kg $\quad U < 4{,}7 \times 10^{6}\ V$

$\rightarrow$ Electron $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg $\quad |U| < 2500\ V$

2-3 Limitation relativiste

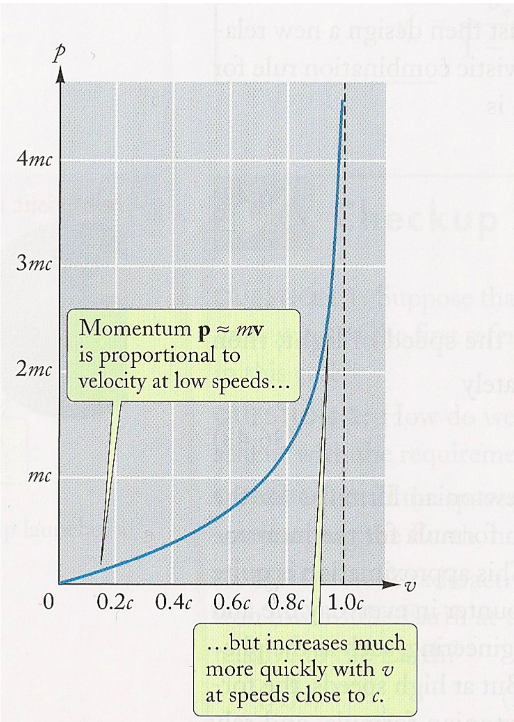


FIGURE 36.23 Momentum of a particle as a function of speed v.

E_c est notée K (pour kinetic) sur la figure

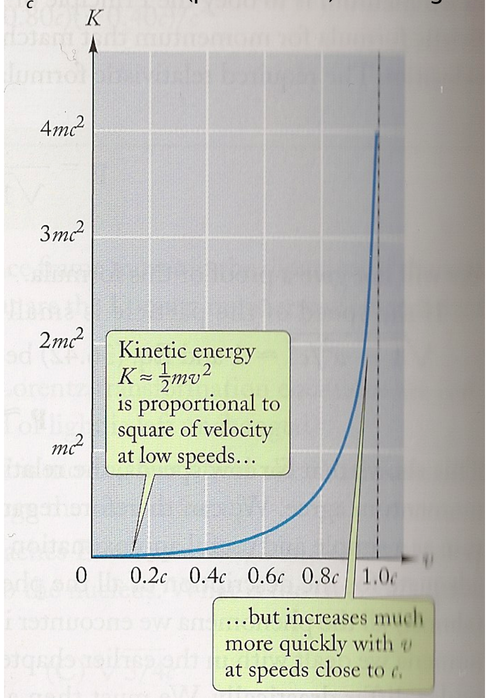


FIGURE 36.24 Kinetic energy of a particle as function of speed v.

$$\vec{p} \equiv \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \underset{v \ll c}{\approx} m\vec{v}$$

$$\varepsilon_c \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 \underset{v \ll c}{\approx} \frac{1}{2}mv^2$$

Pour une particule libre en mouvement, l'énergie totale vaut:

$$\boxed{\varepsilon \equiv mc^2 + \varepsilon_c = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

On peut l'exprimer en fonction de la quantité de mouvement relativiste:

$$\boxed{\varepsilon \equiv \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}}$$

Un électron d'un tube cathodique d'une ancienne TV a une vitesse de $1{,}0 \times 10^8$ m.s^{-1}.

Que vaut la norme de sa quantité de mouvement ?

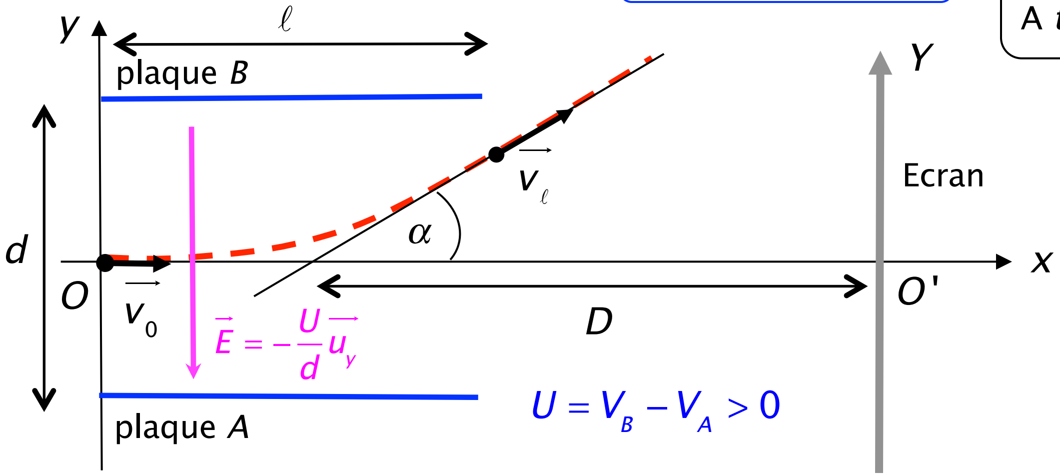
Comparer au cas classique.

2-Mouvement d' une particule chargée dans un champ électrique uniforme et indépendant du temps

2-3 Déflexion électrostatique

cas étudié: $\vec{E} \perp \vec{v_0}$

Soit un électron $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg et $-q = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C
A $t = 0$, l'électron est en O avec $\vec{v_0} = v_0 \vec{u_x}$



- Application de la 2ème loi de Newton

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = -q\vec{E}$$

$$\Rightarrow \text{sur } (Ox) \quad \frac{dv_x}{dt} = 0 \quad v_x = v_0 \quad x = v_0 t$$

$$\Rightarrow \text{sur } (Oy) \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{-qE}{m} \quad v_y = \frac{-qE}{m}t \quad y = \frac{-qE}{2m}t^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{q}{2mv_0^2}\frac{U}{d}x^2 \text{ valable pour } 0 < x < \ell}$$

pour $0 < x < \ell$ $\Rightarrow$ mouvement parabolique

pour $x > \ell$ $\Rightarrow$ mouvement rectiligne uniforme car on néglige le poids

- Calcul de la déflexion

On cherche l'équation de la tangente en ℓ à la courbe parabolique:

$$y = ax + b, \quad a = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\ell} = \frac{q}{mv_0^2}\frac{U}{d}\ell, \quad y(x=\ell) = \frac{q}{2mv_0^2}\frac{U}{d}\ell^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{q}{mv_0^2}\frac{U}{d}\ell\left(x - \frac{\ell}{2}\right)} \quad (y = 0,\ x = \ell/2)$$

$$\tan\alpha = \frac{Y}{D} = \frac{q}{mv_0^2}\frac{U}{d}\ell \quad \Rightarrow \boxed{Y = \frac{q}{mv_0^2}\frac{U}{d}\ell D}$$

- Application

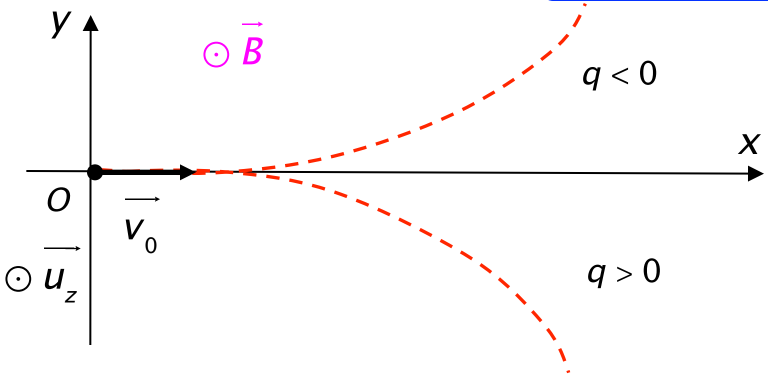
$\Rightarrow$ Si U et v_0 sont fixé, Y dépend du rapport q/m.
On peut trier les particules selon q/m,
principe du spectrographe de masse.

$\Rightarrow$ La déflexion Y est proportionnelle à la tension U,
principe du canon à électron (tube cathodique, oscilloscope).

3-Mouvement d' une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps

3-1 Mouvement circulaire

cas étudié: $\vec{B} \perp \vec{v_0}$



Soit un particule, masse m, charge q

A $t = 0$, particule en O avec $\vec{v_0} = v_0 \vec{u_x}$

- Application de la 2ème loi de Newton: trajectoire plane

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{qB}{m}\vec{v} \wedge \vec{u_z}$$

On pose par définition: $\boxed{\omega \equiv \frac{qB}{m}}$ homogène à une pulsation

Equation du mouvement à résoudre: $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \omega \vec{v} \wedge \vec{u_z}}$

Sur Ox: $\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y$ Sur Oy: $\frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x$ Sur Oz: $\frac{dv_z}{dt} = 0 \Rightarrow z = cste = 0\ \forall t$

$\forall t$, la trajectoire de la particule est dans le plan $xOy \perp \vec{B}$ et (cf page 3) $\|\vec{v}\| = v =$ constante

- Détermination complète de la nature de la trajectoire: méthode de la variable complexe

On introduit par définition: $\boxed{Z \equiv x(t) + j\,y(t)}$ $\Rightarrow \dot{Z} \equiv v_x + jv_y \Rightarrow \frac{d\dot{Z}}{dt} \equiv \omega v_y - j\omega v_x = -j\omega(v_x + jv_y) = -j\omega \dot{Z}$

On doit résoudre: $\boxed{\frac{d\dot{Z}}{\dot{Z}} = -j\omega dt}$

1ère intégration entre $t = 0$ et t: $\dot{Z}(t) = \dot{Z}(0)e^{-j\omega t} = v_0 e^{-j\omega t}$

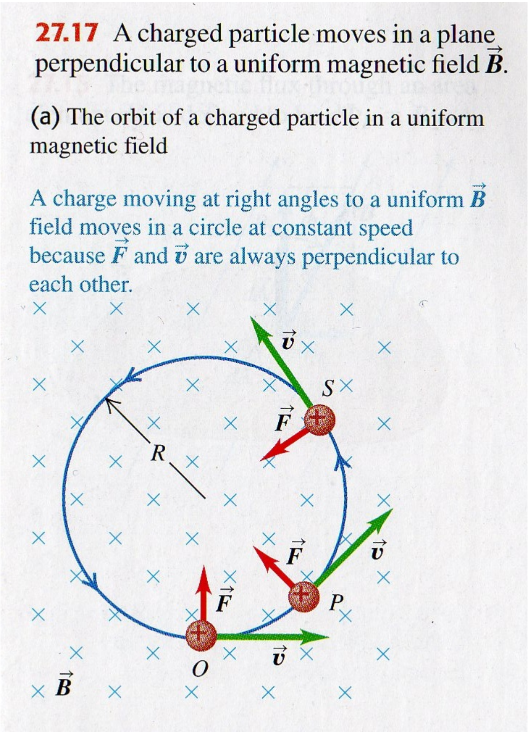
2ème intégration entre $t = 0$ et t: $Z(t) = \frac{v_0}{-j\omega}e^{-j\omega t} + cste(\text{complexe})$

!! Cette résolution n'est pas exigible au programme de PTSI (c'est en plus…) !!

$2^{\text{ème}}$ intégration entre: $Z(t) = \dfrac{v_0}{-j\omega} e^{-j\omega t} + cste$, $Z(0) = 0$ donc $cste = \dfrac{v_0}{j\omega} \Rightarrow Z(t) = \dfrac{v_0}{j\omega}\left(1 - e^{-j\omega t}\right) = -\dfrac{v_0}{\omega}\left[-\sin\omega t + j\left(1 - \cos\omega t\right)\right]$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) \\ y(t) &= -\frac{v_0}{\omega}\left[1 - \cos(\omega t)\right] \end{aligned}\right\} \text{Equations paramétriques d'un cercle de rayon } R = \frac{v_0}{|\omega|} = \frac{mv_0}{|q|B} \text{ et de centre } C\left(0, -\frac{v_0}{\omega}\right)$$

Trajectoire circulaire uniforme à $\omega = \dfrac{|q|B}{m}$, période $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\dfrac{m}{|q|B}$



Si la vitesse initiale de la particule est perpendiculaire au champ magnétique , **le mouvement est circulaire uniforme.**
Si l'on admet ce résultat (c'est la cas du programme) , il est facile de retrouver le rayon de la trajectoire.
En effet, pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération vaut (figure 27-17) :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r}$$

L'application du principe fondamental de la dynamique donne :

$$\boxed{-m\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r} = -|q|vB\overrightarrow{u_r} \quad \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B}}$$

!! Cette méthode est programme de PTSI !!

3-2 Applications

Sélecteur de vitesse

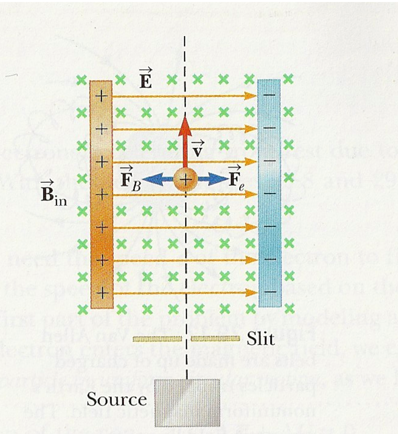


Figure 29.13 A velocity selector. When a positively charged particle is moving with velocity $\vec{v}$ in the presence of a magnetic field directed into the page and an electric field directed to the right, it experiences an electric force $q\vec{E}$ to the right and a magnetic force $q\vec{v} \times \vec{B}$ to the left.

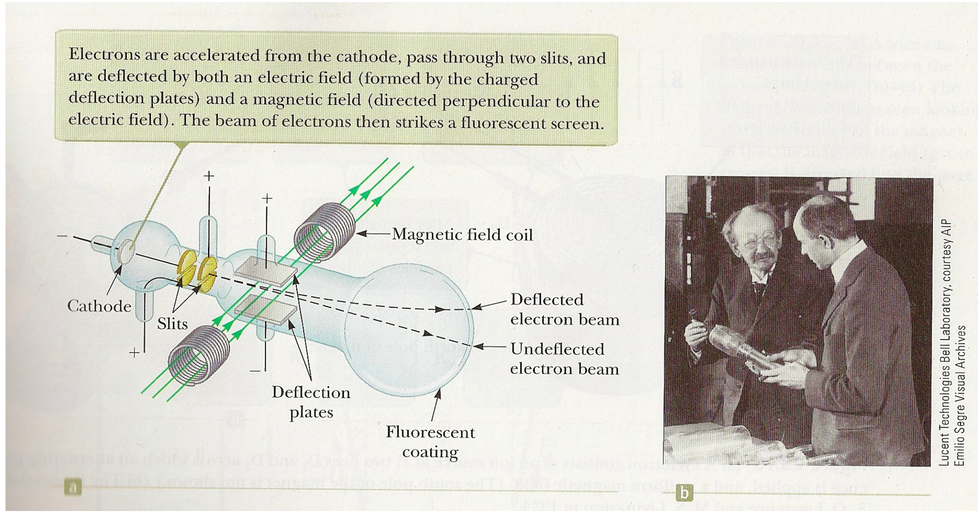
Les particules qui vont tout droit dans le dispositif ci-dessous sont telles que:

$$\boxed{v = \frac{E}{B}}$$

Pourquoi ?

On peut donc sélectionner des particules avec la vitesse désirée en réglant les valeurs des champs.

Spectromètre de masse



Spectromètre utilisé par J. J. Thomson (1856–1940) en 1897 pour mesurer le rapport charge sur masse de l'électron. Cette expérience cruciale a permis la découverte de l'électron comme particule fondamentale de la nature

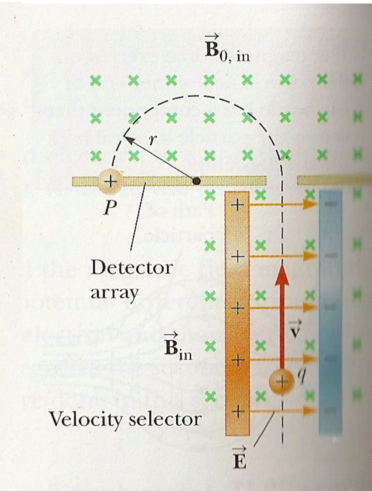


Figure 29.14 A mass spectrometer. Positively charged particles are sent first through a velocity selector and then into a region where the magnetic field $\vec{B}_0$ causes the particles to move in a semicircular path and strike a detector array at P.

Un spectromètre de masse (figure 29-14) sépare les particules de telle façon que le rapport masse sur charge soit égal à:

$$\boxed{\frac{m}{q} = \frac{rB_0}{v}}$$

Si on a placé un sélecteur de vitesse au préalable et en utilisant la relation de gauche, on obtient:

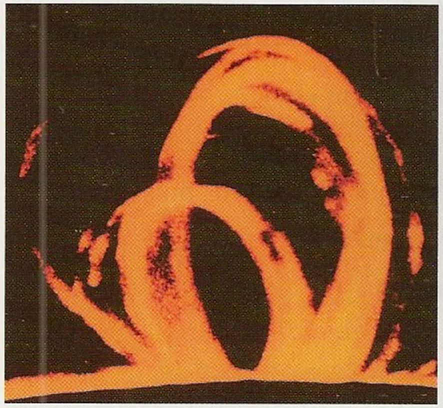
$$\boxed{\frac{m}{q} = \frac{rB_0B}{E}}$$

3-3 Mouvement hélicoïdal: quelques mots

Cas étudié: $\overrightarrow{v_0} = \underbrace{v_0 \cos\theta \, \overrightarrow{u_y}}_{\parallel \text{ à } \vec{B}} + \underbrace{v_0 \sin\theta \, \overrightarrow{u_x}}_{\perp \text{ à } \vec{B}}$

$$\text{Mouvement hélicoïdal} = \begin{cases} \text{mouvement rectligne uniforme selon } \overrightarrow{u_y} \\ + \\ \text{mouvement circulaire uniforme dans le plan xOz} \\ \text{avec } R = \dfrac{v_0 \sin\theta}{|\omega|} = \dfrac{m v_0 \sin\theta}{|q| B} \end{cases}$$

$$\text{Pas de l'hélice} = y(t+T) - y(t) = T \underbrace{v_0 \cos\theta}_{\parallel \text{ à } \vec{B}} = \frac{2\pi m v_0 \cos\theta}{|q| B}$$



La forme de ces éruptions solaires montre qu'une force centripète agit sur elles. La seule façon d'expliquer cela est de concevoir que le Soleil produit un puissant champ magnétique.

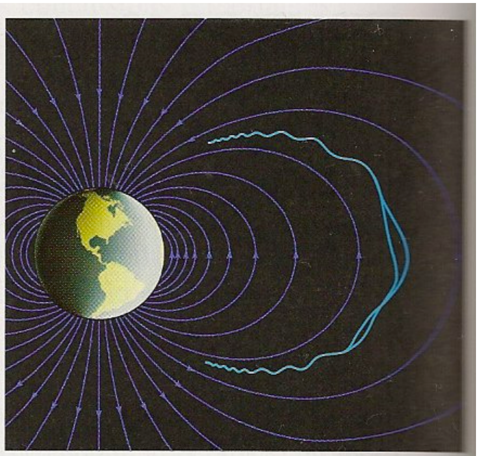


Figure 8.29 ▲ Les protons et les électrons de l'espace sont confinés par le champ magnétique terrestre.